

УДК 531.19.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА В ДРЕВОПОДОБНОЙ ПЕРКОЛЯЦИИ

Е.И.Корнилов, В.Б.Приезжев

Получены статистические суммы на конечных решетках модели древоподобной перколяции. Проведен анализ нулей статсумм, позволяющий сделать вывод об отсутствии фазового перехода в таких системах.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Numerical Study of the Phase Transition for the Tree-Like Percolation

E.I.Kornilov, V.B.Prieszhev

Partition functions of a tree-like percolation model for the final-volume lattices are obtained. The analysis of the zeros of the partition functions is performed allowing one to come to a conclusion on the absence of the phase transition in such systems.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Стефан^{/1/} в 1976 году исследовал предел $s \rightarrow 0$ s -компонентной модели Поттса^{/2/}. На графическом языке этот предел соответствует совокупности кластеров, образованных из ребер решетки \mathcal{L} , при условии отсутствия циклов. Последнее означает, что не существует ни одного замкнутого пути по ребрам кластеров, т.е. что кластеры имеют древоподобную структуру. Эта модель была названа моделью древоподобной перколяции, по аналогии с другим пределом модели Поттса $s \rightarrow 1$, в котором нет запрета на существование циклов, что приводит к обычной модели перколяции на решетке^{/3/}.

Статистическая сумма модели записывается в виде

$$Z(x) = \sum_r T_r x^r, \quad /1/$$

где T_r - число конфигураций деревьев с общей длиной r /количество занятых деревьями ребер решетки \mathcal{L} /, x - активность одного звена дерева. Стефан предположил, что данная модель, так же, как и модель обычной перколяции, обладает критическим поведением, и в приближении среднего поля применил к эффективному гамильтониану технику ренорм-

группы, что позволило ему получить выражения для критических индексов ν и η в пространстве размерности $(8 - \epsilon)$.

Более строгий подход к проблеме древоподобной перколяции использовал Ву^{/4/}. Он указал на то, что производящая функция этой модели тесно связана с полиномами Уитнея

$$W(x, y) = \sum_G x^{r-k} y^k, \quad /2/$$

где суммирование производится по всем подграфам $G \subseteq \mathcal{G}$, содержащим r ребер и k независимых циклов. Статсумму деревьев легко получить, полагая $y = 0$ в /2/, а именно

$$Z(x) = W(x, 0). \quad /3/$$

Существует простое соотношение между средним числом деревьев на один узел $n(x)$ и статсуммой /1/. Если считать пустой узел решетки деревом с нулевой длиной, то справедливо равенство

$$N = N_{\text{дер}} + r, \quad /4/$$

где N - число точек решетки, $N_{\text{дер}}$ - количество деревьев с общей длиной r . Для больших N можно записать

$$n(x) = 1 - x \frac{\partial}{\partial x} w(x, y = 0), \quad /5/$$

где введено обозначение $w(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln W(x, y)$. В обычной теории перколяции исследуется критическое поведение в зависимости от p -вероятности того, что данное ребро решетки занято деревом. Для деревьев на квадратной решетке $n(p) = 1 - 2p$ и поэтому критическое поведение модели обуславливают только особенности статсуммы. Ву обратил внимание на то, что функция $w(x, y)$ является неаналитичной в случае квадратной решетки на линии $xu = 1$ и, предполагая непрерывную зависимость критичности модели от ее параметров, показал, что при $y \rightarrow 0$ единственной точкой неаналитичности является точка $x = \infty$, что и означает отсутствие фазового перехода.

С другой стороны, Стрелей^{/5/} привел контрпример, указывающий на недостаточность аргументов Ву: в планарной модели Изинга в отличном от нуля внешнем поле фазового перехода нет, а в отсутствие внешнего поля происходит фазовый переход второго рода по температуре. Он предложил также алгоритм для численного моделирования древоподобной перколяции на ЭВМ, применение которого указывало на фазовый переход для двух- и трехмерных кристаллов, при плотности связей, немного меньшей, чем для обычной перколяции. Однако в недавней работе^{/6/} было обнаружено существование

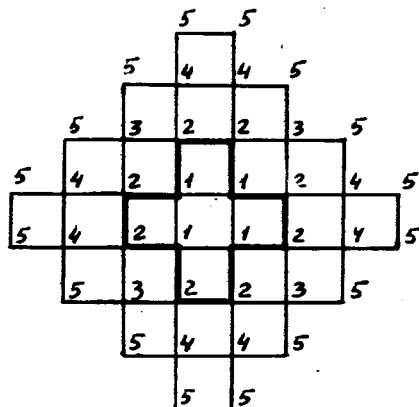


Рис.1. Последовательность фрагментов решетки 1,2,...5.

систематической ошибки в предложенном ранее алгоритме. Новые численные результаты привели авторов к выводу об отсутствии фазового перехода в таких системах.

Точное решение данной проблемы до сих пор неизвестно, хотя недавно^{/7/} авторы настоящего сообщения обнаружили, что близкая к оригинальной проблеме модель

корневых деревьев сводится к ациклической модели^{/8/}, статсумма которой аналитична в области $\text{Re } x > -1/8$ и, следовательно, не обладает критическим поведением /корневое дерево есть дерево с одной выделенной вершиной/.

Целью данной работы является получение полиномов Уитнея^{/3/} на конечных решетках со свободными граничными условиями и анализ распределения нулей $Z(x)$ в комплексной плоскости x . Мы последовательно рассматривали фрагменты квадратной решетки, начиная с элементарного квадрата, обозначенного на рис.1 цифрами 1-1-1-1. Очевидно, что ряд, перечисляющий деревья на таком графе, имеет вид

$$Z_1(x) = 4x^3 + 8x^2 + 4x + 1. \quad /6/$$

Следующий фрагмент, учитывающий отражательную и поворотную симметрии бесконечной квадратной решетки, получается присоединением к элементарному квадрату узлов, обозначенных на рис.1 цифрами 2. Для наглядности этот фрагмент выделен жирной линией. Процедура дальнейшего укрупнения решетки явствует из рисунка. Соответствующие статсуммы приведены в Приложении. Коэффициенты T_r с увеличением размеров решетки быстро возрастают, что создает естественное препятствие для их вычисления для больших размеров решетки.

Нахождение корней статсуммы проводилось на ЭВМ по методу Мюллера^{/9/}. Результат вычисления для $Z_4(x)$ и $Z_5(x)$ представлен на рис.2. Для меньших решеток все корни локализованы в левой полуплоскости. Расположение нулей каждой статсуммы имеет одинаковую структуру. Можно выделить две характерные области: область сгущения нулей приблизительно одинакового модуля вблизи отрицательной полуоси $\text{Re } x$ и область асимптотического приближения нулей к мнимой оси

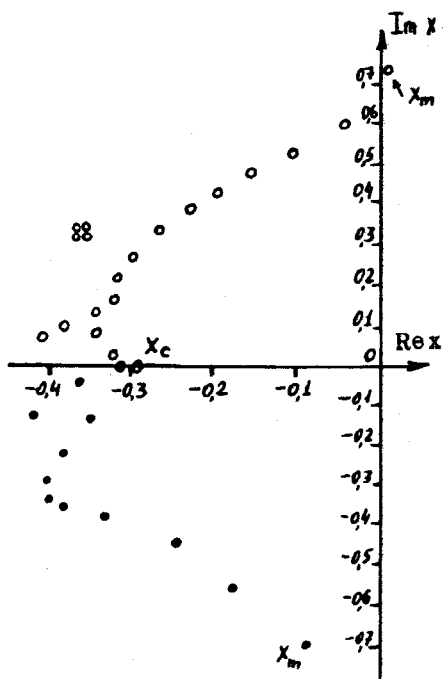


Рис.2. Нули статсуммы Z_5 /верхняя полуплоскость/ и Z_4 /нижняя полуплоскость/.

с увеличением модуля нуля. Модуль наиболее удаленного от начала координат нуля статсуммы x_m растет по мере увеличения размеров решетки. Для самого большого фрагмента решетки появляются два корня с положительной действительной частью $x_m = 0,036 + 0,73i$. Однако нами на обнаружено стремления нулей к положительной полуоси $Re x$, что позволяет сделать вывод об отсутствии фазового перехода в древоподобной перколяции.

В заключение заметим, что ближайшим к началу координат нулем всегда оказывается единственный для каждой статсуммы $Z(x)$ реальный нуль x_c . Мы предполагаем, что для бесконечной квадратной решетки ближайшей к началу координат особенностью статсуммы является точка $x_c = -1/4$, которая не совпадает с ближайшей особенностью модели корневых деревьев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stephen M.J. Phys.Lett., 1976, 56A, p. 149.
2. Wu F.W. Rev.Mod.Phys., 1982, 54, p. 235.
3. Fortuin C.M., Kasteleyn P.W. Physica, 1972, 57, p. 536.
4. Wu F.Y. Phys.Rev., 1978, B18, p. 516.
5. Straley J.P. Phys.Rev., 1979, B19, p. 4845.
6. Braswell W.D., Family F., Straley J.P. Phys.Rev., 1984, A29, p. 254.
7. Kornilov E.I., Priezzhev V.B. Phys.Lett., 1984, 102A, p. 32.
8. Приезжев В.Б. ТМФ, 1977, 31, с. 89.
9. Müller D.E. МТАС, 1956, 10, p. 208.

ПРИЛОЖЕНИЕ

$$z_2(x) = 768 x^{11} + 3360 x^{10} + 7312 x^9 + 10287 x^8 + 10308 x^7 + 7674 x^6 + 4308 x^5 + 1815 x^4 + 560 x^3 + 120 x^2 + 16 + 1$$

$$z_3(x) = 100352 x^{15} + 438352 x^{14} + 994000 x^{13} + 1528336 x^{12} + 1760208 x^{11} + 1593044 x^{10} + 1161496 x^9 + 690436 x^8 + 335652 x^7 + 132874 x^6 + 42324 x^5 + 10617 x^4 + 2024 x^3 + 276 x^2 + 24x + 1$$

$$z_4(x) = 18170880 x^{23} + 134393344 x^{22} + 501985408 x^{21} + 1254651776 x^{20} + 2347470424 x^{19} + 3488390936 x^{18} + 4285881280 x^{17} + 4391582504 x^{16} + 3863378376 x^{15} + 2933011096 x^{14} + 1933364984 x^{13} + 1110107856 x^{12} + 555653712 x^{11} + 242097480 x^{10} + 91474232 x^9 + 29786852 x^8 + 8282752 x^7 + 1941328 x^6 + 376576 x^5 + 58892 x^4 + 7140 x^3 + 630 x^2 + 36x + 1$$

$$z_5(x) = 4846759778304 x^{39} + 522522556628992 x^{38} + 2849204264009728 x^{37} + 10455351435623168 x^{36} + 28989062981336064 x^{35} + 64651151397577040 x^{34} + 120565684155978944 x^{33} + 192987024200881297 x^{32} + 270113747982484144 x^{31} + 335124760844925576 x^{30} + 372370958592677904 x^{29} + 373489039536438156 x^{28} + 340219732204562120 x^{27} + 282794980088788560 x^{26} + 215275542645757016 x^{25} + 150496444725990933 x^{24} + 96815419064406684 x^{23} + 57392221691969102 x^{22} + 31377040880284324 x^{21} + 15825573218620613 x^{20} + 7362479355434328 x^{19} + 3157407343256764 x^{18} + 1246805135038296 x^{17} + 452620823735546 x^{16} + 150735982917748 x^{15} + 45927510188286 x^{14} + 12759823763516 x^{13} + 3219163754783 x^{12} + 733809214320 x^{11} + 150208726040 x^{10} + 27403060448 x^9 + 4413919255 x^8 + 620358676 x^7 + 74930082 x^6 + 7623012 x^5 + 635351 x^4 + 41664 x^3 + 2016 x^2 + 64 x + 1 .$$

Рукопись поступила 10 июня 1984 года.